Séquence 2 : Géométrie dans l'espace

Chapitre 1 : vecteurs, droites et plans de l'espace

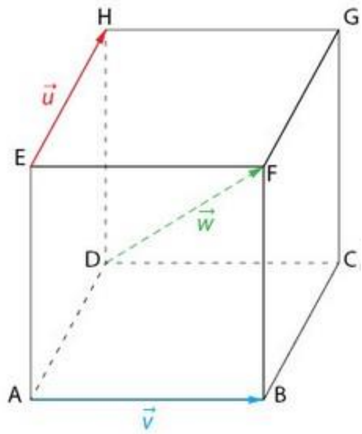
1 Introduction

1 Des vecteurs dans l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane s'étend à l'espace.
Les opérations sur les vecteurs du plan et leurs propriétés se prolongent aux vecteurs de l'espace.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
On donne les vecteurs de l'espace :

$$\vec{u} = \overrightarrow{EH}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{DF}.$$



1 **a)** Justifier que $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$ et en déduire un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
b) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est-il un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$?
Justifier la réponse.

2 Donner un représentant, à l'aide des points de la figure, de chacun des vecteurs.
a) $\vec{w} + \vec{u}$ **b)** $\vec{w} - \vec{v}$ **c)** $\vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$

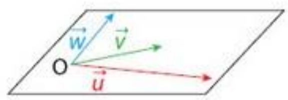
3 **a)** Réaliser ce cube et placer les points O et M définis par :

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\vec{w} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

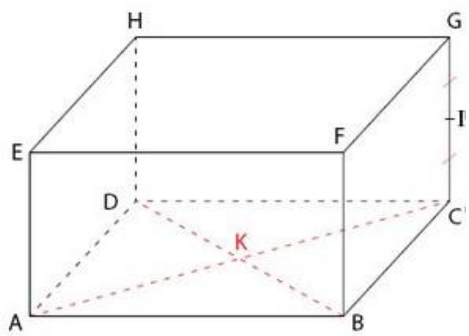
b) Dans le plan de la feuille, représenter le triangle BFH.
Placer les points O et M, puis justifier que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

2 Décomposition de vecteurs

Des vecteurs coplanaires de l'espace sont des vecteurs qui admettent des représentants situés dans le même plan.



ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.
I est le milieu de l'arête [CG] et K est le centre de la face ABCD.



1 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont-ils coplanaires ?
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2 **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AG}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont-ils coplanaires ?

3 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?
On dit que ces vecteurs forment une base de l'espace.
b) Dans chaque cas, décomposer le vecteur dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ c'est-à-dire sous la forme $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$ avec a, b, c nombres réels.
- $\overrightarrow{AK}$
- $\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}$

2 Vecteurs de l'espace

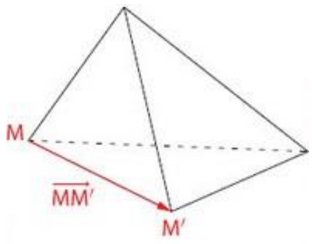
La notion de vecteurs vue en géométrie plane est étendue l'espace.

2.1 Translations et vecteurs

Définition. M et M' sont deux points distincts de l'espace.

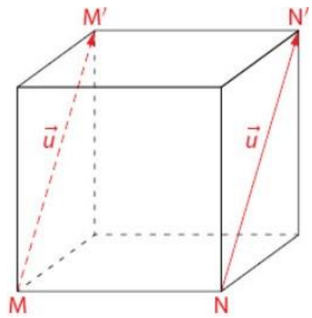
La translation qui transforme M en M' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour direction celle de la droite (MM'), pour sens celui de M vers M' et pour norme la longueur MM'.



La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$, que l'on appelle vecteur nul et que l'on note $\vec{0}$.

Egalité de deux vecteurs



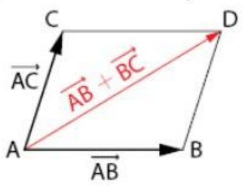
- lorsque la translation qui transforme M en M' transforme également N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux : ce sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$; aussi, $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.
- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \Leftrightarrow MM'N'N$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

2.2 Opérations sur les vecteurs, combinaisons linéaires

• **Somme de deux vecteurs :** A, B et C sont des points de l'espace.

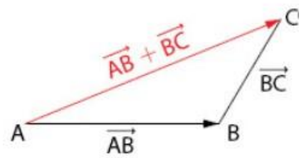
Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.



Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

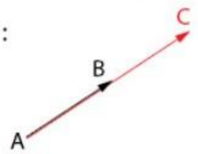


• **Produit d'un vecteur par un nombre réel :** A, B sont des points distincts de l'espace et λ un nombre réel.

Le vecteur $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ est défini par :

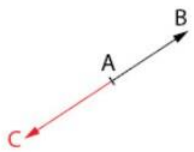
• si $\lambda \geqslant 0$

$C \in [AB]$ et $AC = \lambda AB$



• si $\lambda < 0$

$C \in (AB), C \notin [AB]$ et $AC = \lambda AB$



Proposition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace, et soient λ et λ' des réels.

- $\lambda\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $\quad (\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$ $\quad \lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

Définition. Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}$.

2.3 Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Conséquence : Si A, B et C sont trois points de l'espace deux deux distincts, alors A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition. On considère quatre points de l'espace O, A, B et C et on définit $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points O, A, B et C appartiennent un même plan (c'est- -dire que O, A, B et C sont coplanaires).

Proposition. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

2.4 Vecteurs linéairement indépendants et base de l'espace

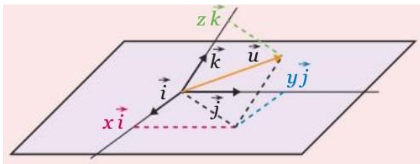
Définition.

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a, b et c trois réels.

  Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow a = b = c = 0$.
- Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Définition. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que : $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Cette décomposition est unique.



On note alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

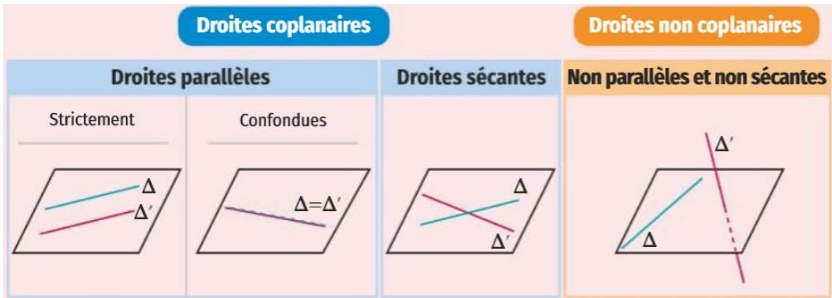
3 Droites et plans de l'espace

Définition. Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est une droite.

Le couple $(A, \vec{u})$ est un repère de cette droite : on dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite.

Définition. Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.
Si elles sont coplanaires, alors elles appartiennent un même plan ; elles peuvent donc être sécantes ou parallèles.



3.1 Plans de l'espace

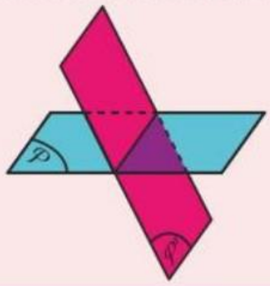
Définition. Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (où λ et μ sont des réels) est un plan de l'espace. On dit que le plan est dirigé par la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

- **Position relative de deux plans.**

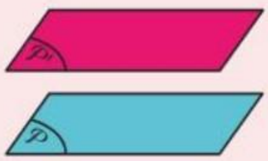
Plans sécants

L'intersection est une droite

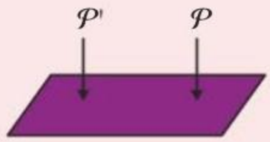


Plans parallèles

Strictement parallèles



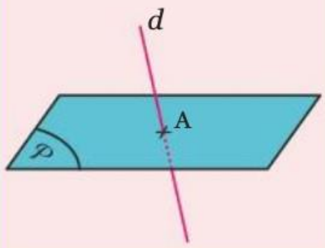
Confondus



- **Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace.**

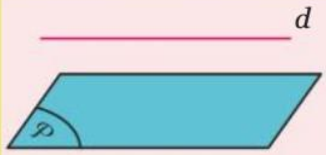
d sécante à $\mathcal{P}$

L'intersection est un point

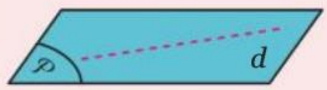


d parallèle à $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ et d strictement parallèles

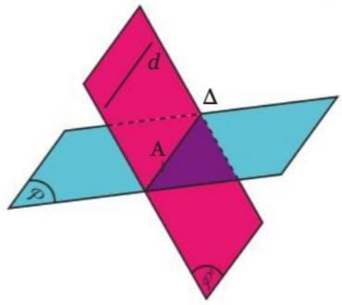


$d \subset \mathcal{P}$ (d incluse dans $\mathcal{P}$)

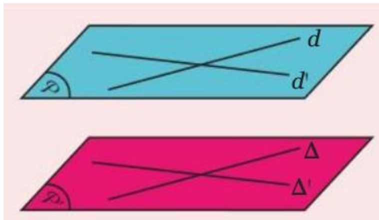


3.2 Parallélisme dans l'espace

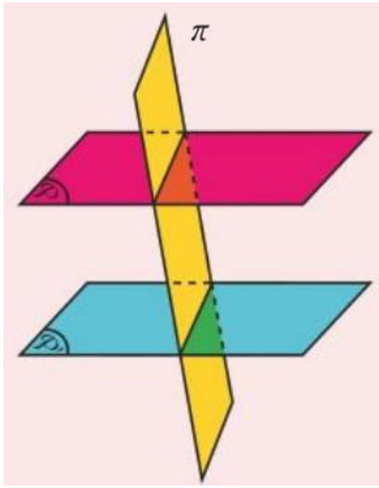
Théorème. Une droite d est parallèle un plan P si et seulement si, il existe une droite Δ du plan P parallèle d.



Théorème. Un plan P' est parallèle un plan P si et seulement si, il existe deux droites sécantes de P' parallèles deux droites sécantes de P.



Théorème. Soient P et P' deux plans strictement parallèles.
Tout plan de P et P' qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection obtenues sont parallèles.



Théorème. (admis) Soient deux droites d et d' parallèles. Soit un plan P contenant d sécant un autre plan P contenant d'.
Alors la droite Δ intersection de P et P' est parallèle à d et d'.